

УДК 373.167.1:514  
ББК 22.151я72  
М52

Одобрено Научно-редакционным советом корпорации  
«Российский учебник» под председательством академиков  
Российской академии наук В. А. Тишкова и В. А. Черешнева

Под редакцией проректора МГУ им. М. В. Ломоносова,  
доктора физико-математических наук В. Е. Подольского

**Мерзляк, А. Г.**

М52 Геометрия : 9 класс : учебник / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский,  
М. С. Якир ; под ред. В. Е. Подольского. — 4-е изд., стереотип. — М. :  
Вентана-Граф, 2020. — 256 с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-360-11384-3

Учебник предназначен для изучения геометрии в 9 классе общеобразова-  
тельных организаций. В нём предусмотрена уровневая дифференциация, позво-  
ляющая формировать у школьников познавательный интерес к математике.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному  
стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:514  
ББК 22.151я72

---

**РОССИЙСКИЙ УЧЕБНИК**

*Учебное издание*

**Мерзляк** Аркадий Григорьевич, **Полонский** Виталий Борисович  
**Якир** Михаил Семёнович

**Геометрия.** 9 класс. Учебник

Редактор *Е. В. Буцко*. Художественный редактор *Е. В. Чайко*  
Внешнее оформление *К. В. Бычкова*. Художники *Н. К. Вахонина, М. А. Хавторин,*  
*Е. Е. Исакова*. Фотографии *В. А. Андрианова, С. С. Мутурича, «Фотобанк Лори»*  
(*Наталья Крупская*), ООО «ТРИ КВАДРАТА», *Shutterstock/FOTODOM*  
Компьютерная вёрстка *О. В. Поповой*. Технический редактор *Л. В. Коновалова*  
Корректоры *О. А. Мерзлякина, Ю. С. Борисенко*

Подписано в печать 18.06.19. Формат 70×90/16. Гарнитура NewBaskervilleITC  
Печать офсетная. Печ. л. 16,0. Тираж 15 000 экз. Заказ №

ООО Издательский центр «Вентана-Граф». 123308, г. Москва, ул. Зорге, д. 1, эт. 5



[rosuchebnik.rf/метод](http://rosuchebnik.rf/метод)

**Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги**  
можно отправлять по электронному адресу: [expert@rosuchebnik.ru](mailto:expert@rosuchebnik.ru)

**По вопросам приобретения продукции издательства обращайтесь:**  
тел.: 8-800-700-64-83; e-mail: [sales@rosuchebnik.ru](mailto:sales@rosuchebnik.ru)

**Электронные формы учебников, другие электронные материалы и сервисы:**  
[lecta.rosuchebnik.ru](http://lecta.rosuchebnik.ru), тел.: 8-800-555-46-68

**В помощь учителю и ученику:** регулярно пополняемая библиотека дополнительных  
материалов к урокам, конкурсы и акции с поощрением победителей, рабочие программы,  
вебинары и видеозаписи открытых уроков [rosuchebnik.rf/метод](http://rosuchebnik.rf/метод)

© Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С., 2014

© Издательский центр «Вентана-Граф», 2014

© Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С., 2019,  
с изменениями

© Издательский центр «Вентана-Граф», 2019, с изменениями

ISBN 978-5-360-11384-3

## От авторов

### Дорогие девятиклассники!

В этом учебном году вы продолжите изучение геометрии. Надеемся, что вы успели полюбить эту важную и красивую науку, а значит, с интересом будете овладевать новыми знаниями. Хотелось бы верить, что этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Учебник разделён на шесть глав, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, выделенный **жирным шрифтом**. Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Их можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи. Свои знания можно проверить, выполняя задания в тестовой форме из рубрики «Проверьте себя».

Если после выполнения домашних заданий остаётся свободное время и вы хотите узнать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный в ней, непростой. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

### **Условные обозначения**



Простые задачи



Задачи средней сложности



Сложные задачи



Задачи высокой сложности



Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач



Окончание доказательства теоремы или решения задачи

**510**

Задания, рекомендуемые для домашней работы

**327**

Задания для устной работы

## Глава 1. Решение треугольников

В этой главе вы узнаете, что такое синус, косинус, тангенс и котангенс угла  $\alpha$ , где  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ .

Вы научитесь по двум сторонам треугольника и углу между ними находить третью сторону, а также по стороне и двум прилежащим к ней углам находить две другие стороны треугольника.

В 8 классе вы научились решать прямоугольные треугольники. Изучив материал этой главы, вы сможете решать произвольные треугольники.

Вы узнаете новые формулы, с помощью которых можно находить площадь треугольника.

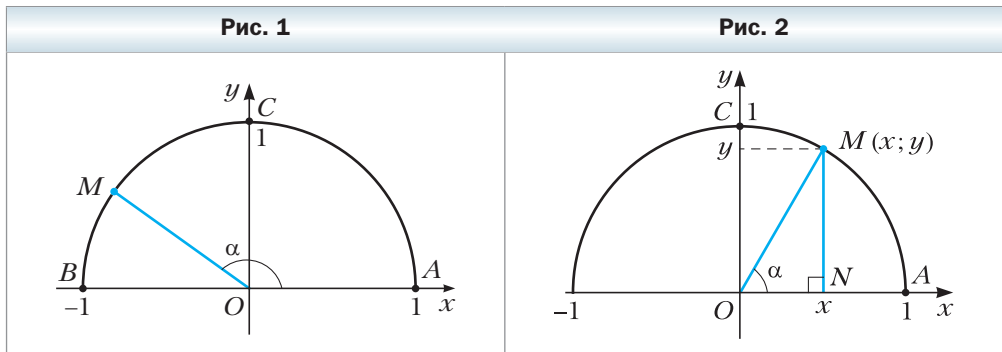
### § 1. Тригонометрические функции угла от $0^\circ$ до $180^\circ$

Перед изучением этого параграфа рекомендуем повторить содержание пункта 36 на с. 241.

Понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла вам знакомы из курса геометрии 8 класса. Расширим эти понятия для любого угла  $\alpha$ , где  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ .

В верхней полуплоскости координатной плоскости рассмотрим полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 1). Такую полуокружность называют **единичной**.

Будем говорить, что углу  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) соответствует точка  $M$  единичной полуокружности, если  $\angle MOA = \alpha$ , где точки  $O$  и  $A$  имеют соответственно координаты  $(0; 0)$  и  $(1; 0)$  (см. рис. 1). Например, на рисунке 1 углу, равному  $90^\circ$ , соответствует точка  $C$ ; углу, равному  $180^\circ$ , — точка  $B$ ; углу, равному  $0^\circ$ , — точка  $A$ .



Пусть  $\alpha$  – острый угол. Ему соответствует некоторая точка  $M(x; y)$  дуги  $AC$  единичной полуокружности (рис. 2). В прямоугольном треугольнике  $OMN$  имеем:

$$\cos \alpha = \frac{ON}{OM}, \quad \sin \alpha = \frac{MN}{OM}.$$

Поскольку  $OM = 1$ ,  $ON = x$ ,  $MN = y$ , то  $\cos \alpha = x$ ,  $\sin \alpha = y$ .

Итак, косинус и синус острого угла  $\alpha$ , которому соответствует точка  $M$  единичной полуокружности, – это соответственно абсцисса и ордината точки  $M$ .

Полученный результат подсказывает, как определить синус и косинус любого угла  $\alpha$ , где  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ .

### Определение

**Косинусом и синусом угла  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ), которому соответствует точка  $M$  единичной полуокружности, называют соответственно абсциссу и ординату точки  $M$  (рис. 3).**

Пользуясь этим определением, можно, например, установить, что:  $\sin 0^\circ = 0$ ,  $\cos 0^\circ = 1$ ,  $\sin 90^\circ = 1$ ,  $\cos 90^\circ = 0$ ,  $\sin 180^\circ = 0$ ,  $\cos 180^\circ = -1$ .

Если  $M(x; y)$  – произвольная точка единичной полуокружности, то  $-1 \leq x \leq 1$  и  $0 \leq y \leq 1$ . Следовательно, для любого угла  $\alpha$ , где  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ , имеем:

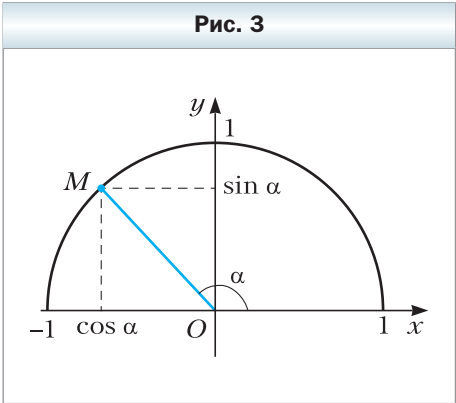
$$0 \leq \sin \alpha \leq 1, \\ -1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

Если  $\alpha$  – тупой угол, то абсцисса точки, соответствующей этому углу, отрицательна. Следовательно, косинус тупого угла является отрицательным числом. Справедливо и такое утверждение: если  $\cos \alpha < 0$ , то  $\alpha$  – тупой или развёрнутый угол.

Из курса геометрии 8 класса вы знаете, что для любого острого угла  $\alpha$  выполняются равенства:

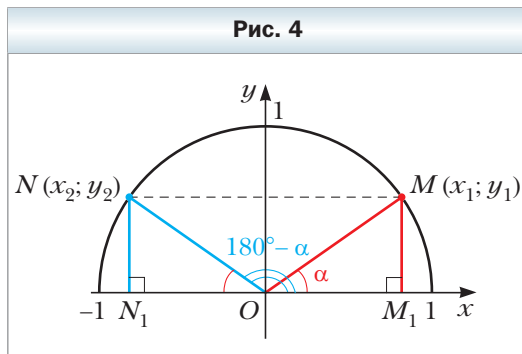
$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \\ \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

Эти формулы остаются справедливыми и для  $\alpha = 0^\circ$ , и для  $\alpha = 90^\circ$  (убедитесь в этом самостоятельно).



Пусть углам  $\alpha$  и  $180^\circ - \alpha$ , где  $\alpha \neq 0^\circ$ ,  $\alpha \neq 90^\circ$  и  $\alpha \neq 180^\circ$ , соответствуют точки  $M(x_1; y_1)$  и  $N(x_2; y_2)$  единичной полуокружности (рис. 4).

Прямоугольные треугольники  $OMM_1$  и  $ONN_1$  равны по гипотенузе и острому углу ( $ON = OM = 1$ ,  $\angle MOM_1 = \angle NON_1 = \alpha$ ). Отсюда  $y_2 = y_1$  и  $x_2 = -x_1$ . Следовательно:



$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha, \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha\end{aligned}$$

Убедитесь самостоятельно, что эти равенства остаются верными для  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\alpha = 180^\circ$ .

Если  $\alpha$  – острый угол, то, как вы знаете из курса геометрии 8 класса, справедливо равенство, которое называют **основным тригонометрическим тождеством**:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Оно остаётся верным для  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\alpha = 180^\circ$  (убедитесь в этом самостоятельно).

Пусть  $\alpha$  – тупой угол, тогда угол  $180^\circ - \alpha$  является острым. Имеем:

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= (\sin(180^\circ - \alpha))^2 + (-\cos(180^\circ - \alpha))^2 = \\ &= \sin^2(180^\circ - \alpha) + \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1.\end{aligned}$$

Следовательно, равенство  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  выполняется для всех  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ .

**Определение**

**Тангенсом угла  $\alpha$ , где  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  и  $\alpha \neq 90^\circ$ , называют отношение  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , т. е.**

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Поскольку  $\cos 90^\circ = 0$ , то  $\operatorname{tg} \alpha$  не определён для  $\alpha = 90^\circ$ .

 **Определение**

**Котангенсом угла  $\alpha$ , где  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ , называют отношение  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ , т. е.**

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Поскольку  $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$ , то  $\operatorname{ctg} \alpha$  не определён для  $\alpha = 0^\circ$  и  $\alpha = 180^\circ$ .

Очевидно, что каждому углу  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) соответствует *единственная* точка единичной полуокружности. Значит, каждому углу  $\alpha$  соответствует единственное число, которое является значением синуса (косинуса, тангенса для  $\alpha \neq 90^\circ$ , котангенса для  $\alpha \neq 0^\circ$  и  $\alpha \neq 180^\circ$ ). Поэтому зависимость значения синуса (косинуса, тангенса, котангенса) от величины угла является функциональной.

Функции  $f(\alpha) = \sin \alpha$ ,  $g(\alpha) = \cos \alpha$ ,  $h(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $p(\alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$ , соответствующие этим функциональным зависимостям, называют **тригонометрическими функциями** угла  $\alpha$ .



**Задача 1.** Докажите, что  $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ .

Решение.  $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$ .

$$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\cos(180^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha. \blacktriangleleft$$

**Задача 2.** Найдите  $\sin 120^\circ$ ,  $\cos 120^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 120^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 120^\circ$ .

Решение.  $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 120^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{ctg} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \blacktriangleleft$$



1. Какую полуокружность называют единичной?
2. Объясните, в каком случае говорят, что углу  $\alpha$  соответствует точка  $M$  единичной полуокружности.
3. Что называют синусом угла  $\alpha$ , где  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ?

4. Что называют косинусом угла  $\alpha$ , где  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ?
5. Чему равен  $\sin 0^\circ$ ,  $\cos 0^\circ$ ,  $\sin 90^\circ$ ,  $\cos 90^\circ$ ,  $\sin 180^\circ$ ,  $\cos 180^\circ$ ?
6. В каких пределах находятся значения  $\sin \alpha$ , если  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ?
7. В каких пределах находятся значения  $\cos \alpha$ , если  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ?
8. Каким числом, положительным или отрицательным, является синус острого угла? Синус тупого угла? Косинус острого угла? Косинус тупого угла?
9. Каким углом является угол  $\alpha$ , если  $\cos \alpha < 0$ ?
10. Чему равен  $\sin (180^\circ - \alpha)$ ,  $\cos (180^\circ - \alpha)$ ?
11. Как связаны между собой синус и косинус одного и того же угла?
12. Что называют тангенсом угла  $\alpha$ , где  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  и  $\alpha \neq 90^\circ$ ?
13. Что называют котангенсом угла  $\alpha$ , где  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ?
14. Почему  $\operatorname{tg} \alpha$  не определён для  $\alpha = 90^\circ$ ?
15. Почему  $\operatorname{ctg} \alpha$  не определён для  $\alpha = 0^\circ$  и  $\alpha = 180^\circ$ ?
16. Как называют функции  $f(\alpha) = \sin \alpha$ ,  $g(\alpha) = \cos \alpha$ ,  $h(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha$  и  $p(\alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$ ?

### Практическое задание

1. Начертите единичную полуокружность, взяв за единичный такой отрезок, длина которого в 5 раз больше стороны клетки тетради. Постройте угол, вершиной которого является начало координат, а одной из сторон – положительная полуось оси абсцисс:

- 1) косинус которого равен  $\frac{1}{5}$ ;
- 2) косинус которого равен  $-0,4$ ;
- 3) синус которого равен  $0,6$ ;
- 4) синус которого равен  $1$ ;
- 5) косинус которого равен  $0$ ;
- 6) косинус которого равен  $-1$ .

### Упражнения

2. Чему равен:
  - 1)  $\sin (180^\circ - \alpha)$ , если  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ;
  - 2)  $\cos (180^\circ - \alpha)$ , если  $\cos \alpha = 0,7$ ;
  - 3)  $\cos (180^\circ - \alpha)$ , если  $\cos \alpha = -\frac{4}{9}$ ;
  - 4)  $\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha)$ , если  $\operatorname{tg} \alpha = -5$ ;
  - 5)  $\operatorname{ctg} (180^\circ - \alpha)$ , если  $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{3}$ ?

- 3.** Углы  $\alpha$  и  $\beta$  смежные,  $\cos \alpha = -\frac{1}{6}$ .
- 1) Найдите  $\cos \beta$ .
  - 2) Какой из углов  $\alpha$  и  $\beta$  является острым, а какой — тупым?
- 4.** Найдите значение выражения:
- 1)  $2\sin 90^\circ + 3\cos 0^\circ$ ;
  - 2)  $3\sin 0^\circ - 5\cos 180^\circ$ ;
  - 3)  $\operatorname{tg} 23^\circ \cdot \operatorname{tg} 0^\circ \cdot \operatorname{tg} 106^\circ$ ;
  - 4)  $6\operatorname{tg} 180^\circ + 5\sin 180^\circ + \operatorname{ctg} 90^\circ$ ;
  - 5)  $\cos^2 165^\circ + \sin^2 165^\circ$ ;
  - 6)  $\frac{\sin 0^\circ + \sin 90^\circ}{\cos 0^\circ - \cos 90^\circ}$ .
- 5.** Вычислите:
- 1)  $4\cos 90^\circ + 2\cos 180^\circ - \operatorname{ctg} 90^\circ$ ;
  - 2)  $\cos 0^\circ - \cos 180^\circ + \sin 90^\circ$ .
- 6.** Чему равен синус угла, если его косинус равен: 1) 1; 2) 0? Чему равен тангенс угла, если его котангенс равен: 1) 1; 2)  $-\frac{1}{3}$ ?
- 7.** Чему равен косинус угла, если его синус равен: 1) 1; 2) 0? Чему равен котангенс угла, если его тангенс равен: 1)  $-1$ ; 2) 3?
- 8.** Найдите  $\sin 135^\circ$ ,  $\cos 135^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 135^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 135^\circ$ .
- 9.** Найдите  $\sin 150^\circ$ ,  $\cos 150^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 150^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 150^\circ$ .
- 10.** Существует ли угол  $\alpha$ , для которого:
- 1)  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ;
  - 2)  $\sin \alpha = 0,3$ ;
  - 3)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$ ;
  - 4)  $\cos \alpha = -0,99$ ;
  - 5)  $\cos \alpha = 1,001$ ;
  - 6)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ?
- 11.** Найдите:
- 1)  $\cos \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  и  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ;
  - 2)  $\cos \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  и  $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ;
  - 3)  $\cos \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ;
  - 4)  $\sin \alpha$ , если  $\cos \alpha = -0,8$ ;
  - 5)  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  и  $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ ;
  - 6)  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$  и  $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ .
- 12.** Найдите:
- 1)  $\cos \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ;
  - 2)  $\sin \alpha$ , если  $\cos \alpha = \frac{1}{6}$ ;
  - 3)  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$  и  $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ ;
  - 4)  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$ .



- 13.** Верно ли утверждение (ответ обоснуйте):
- 1) косинус острого угла больше косинуса тупого угла;
  - 2) существует угол, синус и косинус которого равны;
  - 3) существует угол, синус и косинус которого равны нулю;
  - 4) косинус угла треугольника может быть равным отрицательному числу;
  - 5) синус угла треугольника может быть равным отрицательному числу;
  - 6) косинус угла треугольника может быть равным нулю;
  - 7) синус угла треугольника может быть равным нулю;
  - 8) косинус угла треугольника может быть равным  $-1$ ;
  - 9) синус угла треугольника может быть равным  $1$ ;
  - 10) синус угла, отличного от прямого, меньше синуса прямого угла;
  - 11) косинус развёрнутого угла меньше косинуса угла, отличного от развёрнутого;
  - 12) синусы смежных углов равны;
  - 13) косинусы неравных смежных углов являются противоположными числами;
  - 14) если косинусы двух углов равны, то равны и сами углы;
  - 15) если синусы двух углов равны, то равны и сами углы;
  - 16) тангенс острого угла больше тангенса тупого угла;
  - 17) тангенс острого угла больше котангенса тупого угла?
- 14.** Сравните с нулём значение выражения:
- 1)  $\sin 110^\circ \cos 140^\circ$ ;
  - 2)  $\sin 80^\circ \cos 100^\circ \cos 148^\circ$ ;
  - 3)  $\sin 128^\circ \cos^2 130^\circ \cos 92^\circ$ ;
  - 4)  $\sin 70^\circ \cos 90^\circ \operatorname{tg} 104^\circ$ ;
  - 5)  $\operatorname{ctg} 100^\circ \sin 114^\circ \cos 11^\circ$ ;
  - 6)  $\cos 85^\circ \sin 171^\circ \operatorname{ctg} 87^\circ$ .
- 15.** Найдите значение выражения:
- 1)  $2\sin 120^\circ + 4\cos 150^\circ - 2\operatorname{tg} 135^\circ$ ;
  - 2)  $\cos 120^\circ - 8\sin^2 150^\circ + 3\cos 90^\circ \cos 162^\circ$ ;
  - 3)  $\cos 180^\circ (\sin 135^\circ \operatorname{tg} 60^\circ - \cos 135^\circ)^2$ ;
  - 4)  $2\sin^2 150^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin^2 45^\circ + \operatorname{tg}^2 120^\circ - \operatorname{ctg}^2 30^\circ$ .
- 16.** Чему равно значение выражения:
- 1)  $2\sin 150^\circ - 4\cos 120^\circ$ ;
  - 2)  $\operatorname{tg} 45^\circ \sin 120^\circ \operatorname{ctg} 150^\circ$ ;
  - 3)  $\sin 90^\circ (\operatorname{tg} 150^\circ \cos 135^\circ - \operatorname{tg} 120^\circ \cos 135^\circ)^2$ ?
- 17.** Найдите значение выражения, не пользуясь таблицами и калькулятором:
- 1)  $\frac{\sin 18^\circ}{\sin 162^\circ}$ ;
  - 2)  $\frac{\cos 18^\circ}{\cos 162^\circ}$ ;
  - 3)  $\frac{\operatorname{tg} 18^\circ}{\operatorname{tg} 162^\circ}$ ;
  - 4)  $\frac{\operatorname{ctg} 18^\circ}{\operatorname{ctg} 162^\circ}$ .
- 18.** Найдите значение выражения, не пользуясь таблицами и калькулятором:
- 1)  $\frac{\sin 28^\circ}{\sin 152^\circ}$ ;
  - 2)  $\frac{\cos 49^\circ}{\cos 131^\circ}$ ;
  - 3)  $\frac{\operatorname{tg} 12^\circ}{\operatorname{tg} 168^\circ}$ .

19. Найдите сумму квадратов синусов всех углов прямоугольного треугольника.
20. Найдите сумму квадратов косинусов всех углов прямоугольного треугольника.
21. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $\angle B = 60^\circ$ , точка  $O$  – центр вписанной окружности. Чему равен косинус угла  $AOC$ ?
22. Точка  $O$  – центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ ,  $\cos \angle BOC = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Найдите угол  $A$  треугольника.

### Упражнения для повторения

23. Высота параллелограмма, проведённая из вершины тупого угла, равна 5 см и делит сторону параллелограмма пополам. Острый угол параллелограмма равен  $30^\circ$ . Найдите диагональ параллелограмма, проведённую из вершины тупого угла, и углы, которые она образует со сторонами параллелограмма.
24. Прямая  $CE$  параллельна боковой стороне  $AB$  трапеции  $ABCD$  и делит основание  $AD$  на отрезки  $AE$  и  $DE$  такие, что  $AE = 7$  см,  $DE = 10$  см. Найдите среднюю линию трапеции.

### Готовимся к изучению новой темы

25. Две стороны треугольника равны 8 см и 11 см. Может ли угол, противолежащий стороне длиной 8 см, быть: 1) тупым; 2) прямым? Ответ обоснуйте.
26. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $BD$ ,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle C = 45^\circ$ ,  $AB = 10$  см. Найдите сторону  $BC$ .
27. Найдите высоту  $BD$  треугольника  $ABC$  и проекцию стороны  $AB$  на прямую  $AC$ , если  $\angle BAC = 150^\circ$ ,  $AB = 12$  см.

## § 2. Теорема косинусов

Из первого признака равенства треугольников следует, что две стороны и угол между ними однозначно определяют треугольник. А значит, по указанным элементам можно, например, найти третью сторону треугольника. Как это сделать, показывает следующая теорема.

### Теорема 2.1

(теорема косинусов)

**Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон и косинуса угла между ними.**

#### Доказательство

Рассмотрим треугольник  $ABC$ . Докажем, например, что  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$ .

Возможны три случая:

- 1) угол  $A$  – острый;
- 2) угол  $A$  – тупой;
- 3) угол  $A$  – прямой.

*Первый случай.* Пусть угол  $A$  – острый. Тогда хотя бы один из углов  $B$  или  $C$  является острым.

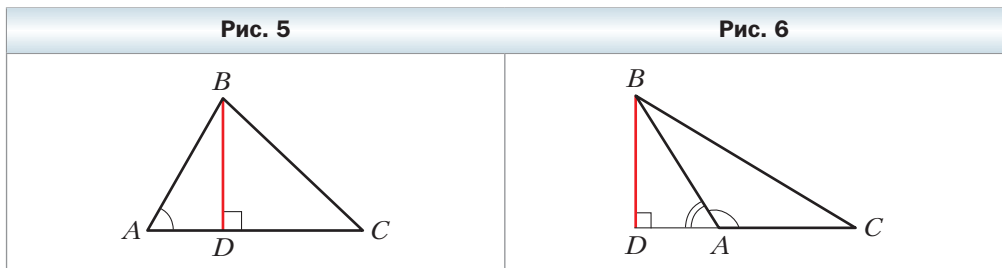
• Пусть  $\angle C < 90^\circ$ . Проведём высоту  $BD$ . Она будет полностью принадлежать треугольнику  $ABC$  (рис. 5).

В прямоугольном треугольнике  $ABD$ :  $BD = AB \cdot \sin A$ ,  $AD = AB \cdot \cos A$ .

$$\begin{aligned} \text{В прямоугольном треугольнике } BDC: BC^2 &= BD^2 + CD^2 = \\ &= BD^2 + (AC - AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 = \\ &= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A = \\ &= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A = \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A. \end{aligned}$$

• Пусть  $\angle B < 90^\circ$ . Проведём высоту треугольника  $ABC$  из вершины  $C$ . Она будет полностью принадлежать треугольнику  $ABC$ . Доказательство этого случая аналогично рассмотренному. Проведите его самостоятельно.

*Второй случай.* Пусть угол  $A$  – тупой. Проведём высоту  $BD$  треугольника  $ABC$  (рис. 6).

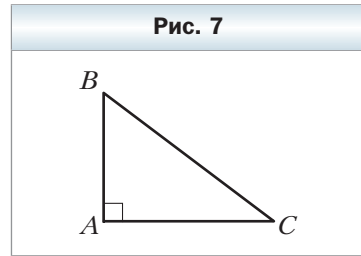


В прямоугольном треугольнике  $ABD$ :  $BD = AB \cdot \sin \angle BAD = AB \cdot \sin (180^\circ - A) = AB \cdot \sin A$ ,

$AD = AB \cdot \cos \angle BAD = AB \cdot \cos (180^\circ - A) = -AB \cdot \cos A$ .

В прямоугольном треугольнике  $BDC$ :  
 $BC^2 = BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC + AD)^2 =$   
 $= AB^2 \cdot \sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos \angle BAC)^2 =$   
 $= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC.$

*Третий случай.* Пусть угол  $A$  — прямой (рис. 7). Тогда  $\cos A = 0$ . Надо доказать, что  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ . Это равенство следует из теоремы Пифагора для треугольника  $ABC$ . ◀



Доказательство теоремы косинусов показывает, что *теорема Пифагора является частным случаем теоремы косинусов, а теорема косинусов является обобщением теоремы Пифагора.*

С помощью теоремы косинусов, зная три стороны треугольника, можно определить, является ли он остроугольным, тупоугольным или прямоугольным.

**Теорема 2.2**

Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  — стороны треугольника, причём  $a$  — его наибольшая сторона. Если  $a^2 < b^2 + c^2$ , то треугольник остроугольный. Если  $a^2 > b^2 + c^2$ , то треугольник тупоугольный. Если  $a^2 = b^2 + c^2$ , то треугольник прямоугольный.

**Доказательство**

Пусть угол, противолежащий наибольшей стороне данного треугольника, равен  $\alpha$ .

По теореме косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

$$\text{Отсюда } 2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2.$$

Если  $a^2 < b^2 + c^2$ , то  $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ . Следовательно,  $2bc \cos \alpha > 0$ , т. е.  $\cos \alpha > 0$ . Поэтому угол  $\alpha$  — острый.

Поскольку  $a$  — наибольшая сторона треугольника, то против неё лежит наибольший угол, который, как мы доказали, является острым. Следовательно, в этом случае треугольник является остроугольным.

Если  $a^2 > b^2 + c^2$ , то  $b^2 + c^2 - a^2 < 0$ . Значит,  $2bc \cos \alpha < 0$ , т. е.  $\cos \alpha < 0$ . Следовательно, угол  $\alpha$  — тупой. В этом случае треугольник является тупоугольным.

Если  $a^2 = b^2 + c^2$ , тогда  $2bc \cos \alpha = 0$ . Следовательно,  $\cos \alpha = 0$ . Отсюда  $\alpha = 90^\circ$ . В этом случае треугольник является прямоугольным. ◀



**Задача 1.** Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Решение. На рисунке 8 изображён параллелограмм  $ABCD$ .

Пусть  $AB = CD = a$ ,  $BC = AD = b$ ,  $\angle BAD = \alpha$ . Тогда  $\angle ADC = 180^\circ - \alpha$ .

По теореме косинусов для треугольника  $ABD$ :

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha. \quad (*)$$

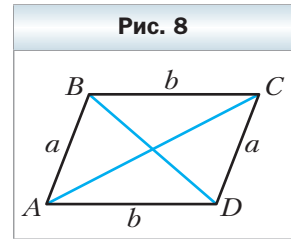
По теореме косинусов для треугольника  $ACD$ :

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (180^\circ - \alpha).$$

$$\text{Отсюда } AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha. \quad (**)$$

Сложив равенства (\*) и (\*\*), получим

$$BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2. \blacktriangleleft$$



**Задача 2.** В треугольнике  $ABC$  сторона  $AB$  на 4 см больше стороны  $BC$ ,  $\angle B = 120^\circ$ ,  $AC = 14$  см. Найдите стороны  $AB$  и  $BC$ .

Решение. По теореме косинусов  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$ .

Пусть  $BC = x$  см ( $x > 0$ ), тогда  $AB = (x + 4)$  см.

Имеем:

$$14^2 = (x + 4)^2 + x^2 - 2x(x + 4)\cos 120^\circ;$$

$$196 = x^2 + 8x + 16 + x^2 - 2x(x + 4) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$196 = 2x^2 + 8x + 16 + x(x + 4);$$

$$3x^2 + 12x - 180 = 0;$$

$$x^2 + 4x - 60 = 0;$$

$$x_1 = 6; x_2 = -10.$$

Корень  $x_2 = -10$  не удовлетворяет условию  $x > 0$ .

Следовательно,  $BC = 6$  см,  $AB = 10$  см.

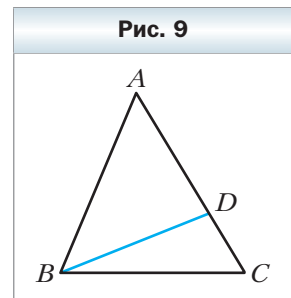
Ответ: 10 см, 6 см.  $\blacktriangleleft$

**Задача 3.** На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  отметили точку  $D$  так, что  $CD : AD = 1 : 2$ . Найдите отрезок  $BD$ , если  $AB = 14$  см,  $BC = 13$  см,  $AC = 15$  см.

Решение. По теореме косинусов для треугольника  $ABC$  (рис. 9):

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos C.$$

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } \cos C &= \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \\ &= \frac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{225 + 169 - 196}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{33}{65}. \end{aligned}$$



Поскольку  $CD : AD = 1 : 2$ , то  $CD = \frac{1}{3}AC = 5$  см.

Тогда в треугольнике  $BCD$ :

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C = 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \frac{33}{65} = 128.$$

Следовательно,  $BD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$  (см).

Ответ:  $8\sqrt{2}$  см. ◀

**Задача 4.** Две стороны треугольника равны 23 см и 30 см, а медиана, проведённая к большей из известных сторон, – 10 см. Найдите третью сторону треугольника.

Решение. Пусть в треугольнике  $ABC$   $AC = 23$  см,  $BC = 30$  см, отрезок  $AM$  – медиана,  $AM = 10$  см.

На продолжении отрезка  $AM$  за точку  $M$  отложим отрезок  $MD$ , равный медиане  $AM$  (рис. 10). Тогда  $AD = 20$  см.

В четырёхугольнике  $ABDC$  диагонали  $AD$  и  $BC$  точкой  $M$  пересечения делятся пополам ( $BM = MC$  по условию,  $AM = MD$  по построению). Следовательно, четырёхугольник  $ABDC$  – параллелограмм.

Так как сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон, то:

$$AD^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2).$$

Тогда

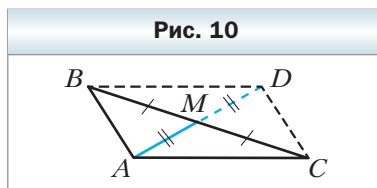
$$20^2 + 30^2 = 2(AB^2 + 23^2);$$

$$400 + 900 = 2(AB^2 + 529);$$

$$AB^2 = 121;$$

$$AB = 11 \text{ см.}$$

Ответ: 11 см. ◀



1. Сформулируйте теорему косинусов.
2. Остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$ , где  $a$  – его наибольшая сторона, если:  
1)  $a^2 < b^2 + c^2$ ;    2)  $a^2 > b^2 + c^2$ ;    3)  $a^2 = b^2 + c^2$ ?
3. Как связаны между собой диагонали и стороны параллелограмма?



### Упражнения

28. Найдите неизвестную сторону треугольника  $ABC$ , если:
- 1)  $AB = 5$  см,  $BC = 8$  см,  $\angle B = 60^\circ$ ;
  - 2)  $AB = 3$  см,  $AC = 2\sqrt{2}$  см,  $\angle A = 135^\circ$ .