УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721
М52

Одобрено Научно-редакционным советом корпорации «Российский учебник» под председательством академиков Российской академии наук В. А. Тишкова и В. А. Черешнева

Под редакцией проректора МГУ им. М. В. Ломоносова, доктора физико-математических наук В. Е. Подольского

Мерзляк, А. Г.

М52 Алгебра : 9 класс : учебник / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир ; под ред. В. Е. Подольского. — 4-е изд., стереотип. — М. : Вентана-Граф, 2020. — 318, [2] с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-360-11386-7

Учебник предназначен для изучения алгебры в 9 классе общеобразовательных организаций. В нём предусмотрена уровневая дифференциация, позволяющая формировать у школьников познавательный интерес к алгебре.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721

ISBN 978-5-360-11386-7

От авторов

Дорогие девятиклассники!

В этом учебном году вы продолжите изучение алгебры. Надеемся, что вы успели полюбить эту важную и красивую науку, а значит, с интересом будете овладевать новыми знаниями, и этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделён на четыре главы, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. **Жирным** шрифтом напечатаны тексты определений, теорем, математические термины. *Курсивом* напечатаны отдельные слова или предложения, важные для понимания текста.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи (особенно те, которые обозначены звёздочкой). Свои знания можно проверить, решая задачи в тестовой форме из рубрики «Проверьте себя».

Если после выполнения домашних заданий остаётся свободное время и вы хотите знать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный в ней, непростой. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

○ Простые задачи

○○ Задачи средней сложности

✧ Сложные задачи

✵ Задачи высокой сложности

◄ Окончание доказательства теоремы или решения задачи

Работа с компьютером

340 Задания, рекомендуемые для домашней работы

310 Задания, рекомендуемые для устной работы

Глава 1. Неравенства

В этой главе вы узнаете, в каком случае считают, что число a больше (меньше) числа b, изучите свойства числовых неравенств, узнаете, что называют решением неравенства с одной переменной, решением системы неравенств с одной переменной.

Вы научитесь оценивать значения выражений, доказывать неравенства, решать линейные неравенства и системы линейных неравенств с одной переменной.

§ 1. Числовые неравенства

На практике вам часто приходится сравнивать значения величин. Например, площадь спортзала больше площади классной комнаты, расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга меньше расстояния от Москвы до Пятигорска.

Результаты таких сравнений можно записывать в виде числовых неравенств, используя знаки >, <.

Если число a больше числа b, то пишут $a > b$; если число a меньше числа b, то пишут $a < b$.

Очевидно, что $12 > 7$, $-17 < 3$, $\frac{15}{23} > \frac{11}{23}$, $\sqrt{2} > 1$. Справедливость этих неравенств следует из правил сравнения действительных чисел, которые вы изучили в предыдущих классах.

Однако числа можно сравнивать не только с помощью изученных ранее правил. Другой способ, более универсальный, основан на таких очевидных соображениях: если разность двух чисел положительна, то уменьшаемое больше вычитаемого, если же разность отрицательна, то уменьшаемое меньше вычитаемого.

Эти соображения подсказывают, что удобно принять такое определение.

Определение

Число a считают больше числа b, если разность $a - b$ является положительным числом. Число a считают меньше числа b, если разность $a - b$ является отрицательным числом.

Это определение позволяет задачу о сравнении двух чисел свести к задаче о сравнении их разности с нулём. Например, чтобы сравнить значения выражений $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$ и $2-\sqrt{3}$, рассмотрим их разность:

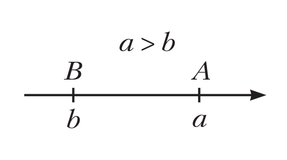
$$\frac{2}{2+\sqrt{3}} - (2-\sqrt{3}) = \frac{2-\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-(4-3)}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

Поскольку $\frac{1}{2+\sqrt{3}} > 0$, то $\frac{2}{2+\sqrt{3}} > 2-\sqrt{3}$.

Заметим, что разность чисел a и b может быть либо положительной, либо отрицательной, либо равной нулю, поэтому *для любых чисел a и b справедливо одно и только одно из таких соотношений: $a > b$, $a < b$, $a = b$.*

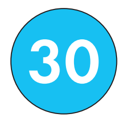
Если $a > b$, то точка, изображающая число a на координатной прямой, лежит правее точки, изображающей число b (рис. 1).

Рис. 1



Часто в повседневной жизни мы пользуемся высказываниями «не больше», «не меньше». Например, в соответствии с санитарными нормами количество учеников в 9 классе должно быть не больше 25. Дорожный знак, изображённый на рисунке 2, означает, что скорость движения автомобиля должна быть не меньше 30 км/ч.

Рис. 2



В математике для высказывания «не больше» используют знак $\leq$ (читают: «меньше или равно»), а для высказывания «не меньше» — знак $\geq$ (читают: «больше или равно»).

Если $a < b$ или $a = b$, то верно неравенство $a \leq b$.

Если $a > b$ или $a = b$, то верно неравенство $a \geq b$.

Например, неравенства $7 \leq 7$, $7 \leq 15$, $-3 \geq -5$ верны. Заметим, что, например, неравенство $7 \leq 5$ неверно.

Знаки > и < называют знаками **строгого неравенства**, а знаки $\geq$ и $\leq$ называют знаками **нестрогого неравенства**.

Пример 1. Докажите, что при любых значениях a верно неравенство

$$(a+1)(a+2) > a(a+3).$$

Решение. Для решения достаточно показать, что при любом a разность левой и правой частей данного неравенства положительна. Имеем:

$$(a+1)(a+2) - a(a+3) = a^2 + 2a + a + 2 - a^2 - 3a = 2. ◄$$

В таких случаях говорят, что **доказано неравенство** $(a+1)(a+2) > a(a+3)$.

Пример 2. Докажите неравенство $(a-3)^2 < 2a^2 - 6a + 10$, где a — любое число.

Решение. Рассмотрим разность левой и правой частей данного неравенства:

$$(a-3)^2 - (2a^2 - 6a + 10) = a^2 - 6a + 9 - 2a^2 + 6a - 10 = -a^2 - 1 = -a^2 + (-1).$$

При любом значении a имеем: $-a^2 \le 0$. Сумма неположительного и отрицательного чисел является числом отрицательным. Значит, $-a^2 + (-1) < 0$. Отсюда следует, что $(a-3)^2 < 2a^2 - 6a + 10$ при любом значении a. ◄

Пример 3. Докажите неравенство $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$, где $a \ge 0$, $b \ge 0$.

Решение. Рассмотрим разность левой и правой частей данного неравенства. Имеем:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

Выражение $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$ принимает неотрицательные значения при любых неотрицательных значениях переменных a и b. Следовательно, доказываемое неравенство верно. ◄

Заметим, что выражение $\sqrt{ab}$ называют **средним геометрическим** чисел a и b.

Итак, мы доказали, что *среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического.*

Пример 4. Докажите, что $a^2 - ab + b^2 \ge 0$ при любых значениях a и b.

Решение. Имеем:

$$a^2 - ab + b^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2 = \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2.$$

Поскольку $\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 \ge 0$ и $\frac{3}{4}b^2 \ge 0$ при любых значениях a и b, то $\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \ge 0$ при любых значениях a и b.

Следовательно, $a^2 - ab + b^2 \ge 0$ при любых значениях a и b. ◄

1. В каком случае число a считают больше числа b?
2. В каком случае число a считают меньше числа b?

3. Как расположена на координатной прямой точка, изображающая число a, относительно точки, изображающей число b, если $a > b$?
4. Какой символ используют для выражения «не больше» и как этот символ читают?
5. Какой символ используют для выражения «не меньше» и как этот символ читают?
6. В каком случае верно неравенство $a \le b$?
7. В каком случае верно неравенство $a \ge b$?
8. Поясните, какие знаки называют знаками строгого, а какие — нестрогого неравенства.

Упражнения

1. Сравните числа a и b, если:
1) $a - b = 0{,}4$; 2) $a - b = -3$; 3) $a - b = 0$.

2. Известно, что $m < n$. Может ли разность $m - n$ быть равной числу:
1) 4,6; 2) –5,2; 3) 0?

3. Какое из чисел x или y больше, если:
1) $x - y = -8$; 2) $y - x = 10$?

4. Как расположена на координатной прямой точка $A(a)$ относительно точки $B(b)$, если:
1) $a - b = 2$; 2) $a - b = -6$; 3) $a - b = 0$; 4) $b - a = \sqrt{2}$?

5. Могут ли одновременно выполняться неравенства:
1) $a > b$ и $a < b$; 2) $a \ge b$ и $a \le b$?

6. Сравните значения выражений $(a - 2)^2$ и $a(a - 4)$ при значении a, равном:
1) 6; 2) –3; 3) 2.
Можно ли по результатам выполненных сравнений утверждать, что при любом значении a значение первого выражения больше соответствующего значения второго выражения? Докажите, что при любом значении a значение первого выражения больше соответствующего значения второго выражения.

7. Сравните значения выражений $4(b + 1)$ и $b - 2$ при значении b, равном:
1) –1; 2) 0; 3) 3.
Верно ли утверждение, что при любом значении b значение выражения $4(b + 1)$ больше соответствующего значения выражения $b - 2$?

8. Докажите, что при любом значении переменной верно неравенство:
1) $(a + 3)(a + 1) > a(a + 4)$;
2) $3(b - 4) + 2b < 5b - 10$;
3) $(c - 4)(c + 4) > c^2 - 20$;
4) $x(x + 6) - x^2 < 2(3x + 1)$;
5) $(y + 5)(y - 2) \ge 3y - 10$;
6) $8m^2 - 6m + 1 \le (3m - 1)^2$;
7) $a(a - 2) \ge -1$;
8) $(b + 7)^2 > 14b + 40$.

9. Докажите, что при любом значении переменной верно неравенство:

1) $(p-3)(p+4) < p(p+1)$;
2) $(x+1)^2 > x(x+2)$;
3) $(a-5)(a+2) > (a+5)(a-8)$;
4) $y(y+8) < (y+4)^2$;
5) $(2a-5)^2 \leq 6a^2 - 20a + 25$;
6) $a^2 + 4 \geq 4a$.

10. Верно ли утверждение:

1) если $a > b$, то $\frac{a}{b} > 1$;
2) если $a > 1$, то $\frac{2}{a} < 2$;
3) если $a < 1$, то $\frac{2}{a} > 2$;
4) если $\frac{a}{b} > 1$, то $a > b$;
5) если $a^2 > 1$, то $a > 1$?

11. Докажите неравенство:

1) $2a^2 - 8a + 16 > 0$;
2) $4b^2 + 4b + 3 > 0$;
3) $a^2 + ab + b^2 \geq 0$;
4) $(3a+2)(2a-4) - (2a-5)^2 > 3(4a-12)$;
5) $a(a-3) > 5(a-4)$;
6) $(a-b)(a+5b) \leq (2a+b)(a+4b) + ab$.

12. Докажите неравенство:

1) $28a - 32 \leq 7a^2 - 4$;
2) $9x^2 - 6xy + 4y^2 \geq 0$;
3) $3(b-1) < b(b+1)$;
4) $(4p-1)(p+1) - (p-3)(p+3) > 3(p^2+p)$.

13. Докажите, что:

1) $a^3 - 6a^2 + a - 6 \geq 0$, если $a \geq 6$;
2) $ab + 1 > a + b$, если $a > 1$ и $b > 1$;
3) $\frac{a+3}{3} + \frac{3a-2}{4} < a$, если $a < -6$.

14. Докажите, что:

1) $ab(b-a) \leq a^3 - b^3$, если $a \geq b$;
2) $\frac{a-1}{2} - \frac{a-2}{3} > \frac{1}{2}$, если $a > 2$.

15. Сравните сумму квадратов двух произвольных действительных чисел и их удвоенное произведение.

16. Даны три последовательных натуральных числа. Сравните:

1) квадрат среднего из этих чисел и произведение двух других;
2) удвоенный квадрат среднего из этих чисел и сумму квадратов двух других.

17. Сравните сумму квадратов двух положительных чисел и квадрат их суммы.

18. Как изменится — увеличится или уменьшится — правильная дробь $\frac{a}{b}$, $a > 0$, $b > 0$, если её числитель и знаменатель увеличить на одно и то же число?

19. Как изменится — увеличится или уменьшится — неправильная дробь $\frac{a}{b}$, $a > 0$, $b > 0$, если её числитель и знаменатель увеличить на одно и то же число?

20. Докажите, что сумма любых двух взаимно обратных положительных чисел не меньше чем 2.

21. Докажите, что сумма любых двух взаимно обратных отрицательных чисел не больше чем −2.

22. Выполняется ли данное неравенство при любых значениях a и b:

1) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2+1} > 1$; 2) $\dfrac{a^2-b^2}{b^2+1} > -1$?

23. Докажите, что при любых значениях переменной верно неравенство:

1) $\dfrac{a^2}{a^4+1} \leq \dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{(5a+1)^2}{5} \geq 4a$.

24. Докажите, что если $a < b$, то $a < \dfrac{a+b}{2} < b$.

25. Докажите, что если $a < b < c$, то $a < \dfrac{a+b+c}{3} < c$.

26. Выполняется ли неравенство $\dfrac{a^2+4}{2} \geq \sqrt{a^2+3}$ при всех значениях a?

27. Докажите, что при всех значениях переменной верно неравенство $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$.

28. Докажите неравенство:
1) $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 \geq 0$;
2) $x^2 - 2x + y^2 + 10y + 28 > 0$;
3) $2m^2 - 6mn + 9n^2 - 6m + 9 \geq 0$;
4) $a^2 + b^2 + c^2 + 12 \geq 4(a + b + c)$;
5) $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \geq 4ab$.

29. Докажите неравенство:
1) $a^2 + b^2 - 16a + 14b + 114 > 0$;
2) $x^2 + y^2 + 10 \geq 6x - 2y$;
3) $c^2 + 5d^2 + 4cd - 4d + 4 \geq 0$.

Упражнения для повторения

30. Известно, что $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $d < 0$. Сравните с нулём значение выражения:

1) bc; 3) $\frac{a}{b}$; 5) $\frac{ac}{d}$; 7) $abcd$;

2) cd; 4) $\frac{ab}{c}$; 6) $\frac{a}{bc}$; 8) $\frac{b}{acd}$.

31. Что можно сказать о знаках чисел a и b, если:

1) $ab > 0$; 3) $\frac{a}{b} > 0$; 5) $a^2b > 0$;

2) $ab < 0$; 4) $\frac{a}{b} < 0$; 6) $a^2b < 0$?

32. Поясните, почему при любых значениях переменной (или переменных) верно неравенство:

1) $a^2 \geq 0$; 5) $a^2 + b^2 \geq 0$;
2) $a^2 + 1 > 0$; 6) $a^2 + b^2 + 2 > 0$;
3) $(a + 1)^2 \geq 0$; 7) $(a - 2)^2 + (b + 1)^2 \geq 0$;
4) $a^2 - 4a + 4 \geq 0$; 8) $\sqrt{a^2 + 3} > 0$.

33. Сравните с нулём значение выражения, где a — произвольное число:

1) $4 + a^2$; 4) $-4 - (a - 4)^2$;
2) $(4 - a)^2$; 5) $(-4)^8 + (a - 8)^4$;
3) $-4 - a^2$; 6) $(4 - a)^2 + (4a - 1000)^2$.

34. Упростите выражение:

1) $2a(5a - 7) - 5a(3 - 2a)$; 4) $16m^2 - (3 - 4m)(3 + 4m)$;
2) $(2b - 3)(4b + 9)$; 5) $(2x - 1)^2 + (2x + 1)^2$;
3) $(2c - 6)(8c + 5) - (5c + 2)(5c - 2)$; 6) $(x - 4)(x + 4) - (x - 8)^2$.

Учимся делать нестандартные шаги

35. Все натуральные числа от 1 до 1000 включительно разбиты на две группы: чётные числа и нечётные числа. В какой из групп сумма всех цифр, используемых для записи чисел, больше и на сколько?

§ 2. Основные свойства числовых неравенств

В этом параграфе рассмотрим свойства числовых неравенств, часто используемые при решении задач. Их называют **основными свойствами числовых неравенств**.

Теорема 2.1

Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

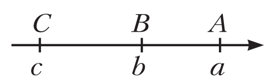
Доказательство

Поскольку по условию $a > b$ и $b > c$, то разности $a - b$ и $b - c$ являются положительными числами. Тогда положительной будет их сумма $(a - b) + (b - c)$. Имеем: $(a - b) + (b - c) = a - c$. Следовательно, разность $a - c$ является положительным числом, поэтому $a > c$. ◄

Аналогично доказывают такое свойство: ***если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.***

Теорему 2.1 можно проиллюстрировать геометрически: если на координатной прямой точка $A(a)$ лежит правее точки $B(b)$, а точка $B(b)$ — правее точки $C(c)$, то точка $A(a)$ лежит правее точки $C(c)$ (рис. 3).

Рис. 3



Теорема 2.2

Если $a > b$ и c — любое число, то $a + c > b + c$.

Доказательство

Рассмотрим разность $(a + c) - (b + c)$. Имеем: $(a + c) - (b + c) = a - b$. Поскольку по условию $a > b$, то разность $a - b$ является положительным числом. Следовательно, $a + c > b + c$. ◄

Аналогично доказывают такое свойство: ***если $a < b$ и c — любое число, то $a + c < b + c$.***

Поскольку вычитание можно заменить сложением $(a - c = a + (-c))$, то теорему 2.2 можно сформулировать так:

если к обеим частям верного неравенства прибавить или из обеих частей верного неравенства вычесть одно и то же число, то получим верное неравенство.

Следствие

Если любое слагаемое перенести из одной части верного неравенства в другую, изменив знак слагаемого на противоположный, то получим верное неравенство.

Доказательство

Пусть неравенство $a > b + c$ верно. Вычтем из обеих его частей число c. Получим: $a - c > b + c - c$, т. е. $a - c > b$. ◄

Теорема 2.3

Если $a > b$ и c — положительное число, то $ac > bc$. Если $a > b$ и c — отрицательное число, то $ac < bc$.

Доказательство

Рассмотрим разность $ac - bc$. Имеем: $ac - bc = c(a - b)$.

По условию $a > b$, следовательно, разность $a - b$ является положительным числом.

Если $c > 0$, то произведение $c(a - b)$ является положительным числом, следовательно, разность $ac - bc$ является положительной, т. е. $ac > bc$.

Если $c < 0$, то произведение $c(a - b)$ является отрицательным числом, следовательно, разность $ac - bc$ является отрицательной, т. е. $ac < bc$. ◄

Аналогично доказывают такое свойство: ***если $a < b$ и c — положительное число, то $ac < bc$; если $a < b$ и c — отрицательное число, то $ac > bc$.***

Поскольку деление можно заменить умножением $\left(\frac{a}{c} = a \cdot \frac{1}{c}\right)$, то теорему 2.3 можно сформулировать так:

если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получим верное неравенство;

если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получим верное неравенство.

Следствие

Если $a > b$ и $ab > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Доказательство

Разделим обе части неравенства $a > b$ на положительное число ab. Получим верное неравенство $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$, т. е. $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Отсюда $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. ◄

Обратим внимание, что если из формулировки следствия убрать условие $ab > 0$, то из неравенства $a > b$ может не следовать неравенство $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Действительно, неравенство $5 > -3$ верно, однако неравенство $\frac{1}{5} < -\frac{1}{3}$ неверно.

В теоремах этого параграфа шла речь о строгих неравенствах. Нестрогие неравенства также обладают аналогичными свойствами. Например, если $a \geq b$ и c — любое число, то $a + c \geq b + c$.

1. Какое из чисел — a или c — больше, если известно, что $a > b$ и $b > c$?

2. Сформулируйте теорему о прибавлении к обеим частям неравенства одного и того же числа.

3. Сформулируйте следствие из теоремы о прибавлении к обеим частям неравенства одного и того же числа.

4. Сформулируйте теорему об умножении обеих частей неравенства на одно и то же число.

Упражнения

36. Известно, что $a > 6$. Верно ли неравенство:
1) $a > 4$; 2) $a \geq 5{,}9$; 3) $a > 7$?

37. Известно, что $a < b$ и $b < c$. Какое из утверждений верно:
1) $a > c$; 2) $a = c$; 3) $c > a$?

38. Запишите неравенство, которое получим, если:
1) к обеим частям неравенства $-3 < 4$ прибавим число 5; число -2;
2) из обеих частей неравенства $-10 < -6$ вычтем число 3; число -4;
3) обе части неравенства $7 > -2$ умножим на число 5; на число -1;
4) обе части неравенства $12 < 18$ разделим на число 6; на число -2.

39. Известно, что $a > b$. Запишите неравенство, которое получим, если:
1) к обеим частям данного неравенства прибавим число 8;
2) из обеих частей данного неравенства вычтем число -6;
3) обе части данного неравенства умножим на число 12;
4) обе части данного неравенства умножим на число $-\frac{1}{3}$;
5) обе части данного неравенства разделим на число $\frac{2}{7}$;
6) обе части данного неравенства разделим на число -4.

40. Известно, что $b > a$, $c < a$ и $d > b$. Сравните числа:
1) a и d; 2) b и c.

41. Расположите в порядке возрастания числа a, b, c и 0, если $a > b$, $0 < b$ и $0 > c$.

42. Известно, что $a > 4$. Сравните с нулём значение выражения:
1) $a - 3$; 3) $(a - 3)(a - 2)$; 5) $(1 - a)^2(4 - a)$.
2) $2 - a$; 4) $\frac{(a-4)(a-2)}{3-a}$;

43. Известно, что $-2 < b < 1$. Сравните с нулём значение выражения:
1) $b + 2$;
2) $1 - b$;
3) $b - 2$;
4) $(b - 1)(b - 3)$;
5) $(b + 2)(b - 4)^2$;
6) $(b - 3)(b + 3)(b - 2)^2$.

44. Дано: $a > b$. Сравните:
1) $a + 9$ и $b + 9$;
2) $b - 6$ и $a - 6$;
3) $1{,}8a$ и $1{,}8b$;
4) $-a$ и $-b$;
5) $-40b$ и $-40a$;
6) $\frac{a}{20}$ и $\frac{b}{20}$;
7) $2a - 3$ и $2b - 3$;
8) $5 - 8a$ и $5 - 8b$.

45. Известно, что $1 \leq m < 2$. Какие из неравенств верны:
1) $-1 \leq -m < -2$;
2) $-2 < -m \leq -1$;
3) $-1 \geq -m > -2$;
4) $-2 > -m \geq -1$?

46. Дано: $-3a > -3b$. Сравните:
1) a и b;
2) $\frac{2}{7}a$ и $\frac{2}{7}b$;
3) $b - 4$ и $a - 4$;
4) $-\frac{5}{9}b$ и $-\frac{5}{9}a$;
5) $3a + 2$ и $3b + 2$;
6) $-5a + 10$ и $-5b + 10$.

47. Известно, что $a > b$. Расположите в порядке убывания числа $a + 7$, $b - 3$, $a + 4$, $b - 2$, b.

48. Дано: $a < b$. Сравните:
1) $a - 5$ и b;
2) a и $b + 6$;
3) $a + 3$ и $b - 2$.

49. Сравните числа a и b, если известно, что:
1) $a > c$ и $c > b + 3$;
2) $a > c$ и $c - 1 > b + d^2$,

где c и d — некоторые числа.

50. Сравните числа a и 0, если:
1) $7a < 8a$;
2) $\frac{a}{2} < \frac{a}{3}$;
3) $-6a > -8a$;
4) $-0{,}02a > -0{,}2a$.

51. Дано: $a > -2$. Докажите, что:
1) $7a + 10 > -4$;
2) $-6a - 3 < 10$.

52. Дано: $b \leq 10$. Докажите, что:
1) $5b - 9 \leq 41$;
2) $1 - 2b > -21$.

53. Верно ли утверждение:
1) если $a > b$, то $a > -b$;
2) если $a > b$, то $2a > b$;
3) если $a > b$, то $2a + 1 > 2b$;
4) если $b > a$, то $\frac{b}{a} > 1$;
5) если $a > b + 2$ и $b - 3 > 4$, то $a > 9$;
6) если $a > b$, то $ab > b^2$;
7) поскольку $5 > 3$, то $5a^2 > 3a^2$;
8) поскольку $5 > 3$, то $5(a^2 + 1) > 3(a^2 + 1)$?